

正・負の数の乗除法計算学習の一事例

2023.7.23 小林靖能

1. 基本的な考え方

(1) 正・負の数の乗除法の根底

- ① 正・負の数の乗除法の根底はかけ算の式

正・負の数の乗除法の根底は、かけ算の式であると考ええる。

1あたり量×いくつ分＝全体量 1あたり量＝全体量÷いくつ分

乗法の演算であるから、正負の符号を考えず「1あたり量×いくつ分＝全体量」の積を求めるタイル図、及び「1あたり量＝全体量÷いくつ分」の全体量を等分し商を求めるタイル図で考えることができないか。

確かに、 $\times (-3)$ 、わる (-3) を (-3) 回加えるや、全体量を (-3) で等分することは考えられない、しかし、 (-3) の $(-)$ の符号を取ると……。

- ② かけ算の式で対象とする3量に正・負の量が必要

かけ算の式で用いる3量に正・負の量が必要になる、と考える。

例えば、速度×時間＝距離

速度＝距離÷時間 などを次のように考え約束すれば、乗除法に正・負の量を具体的に扱うことができる。

速度→東方と西方の反対方向の速度

時間→現在を起点とした未来と過去

距離→現在地を起点とした東方と西方の距離

東方へ向かって毎時4kmの速さは $+4 \text{ km/h}$

西方へ向かって毎時4kmの速さは -4 km/h などのように。

- ③ 「 \times 」の約束

4×3 は、タイル図を用いて4（1あたり量）を3回累加し12を求めてきた。つまり、 $4 + 4 + 4$ のように4を3回加え、 $4 \times 3 = 12$ を求めてきた。

しかし、 $4 \times (-3)$ を考えると、4を -3 回加えることを実際に考えることができない。正負の符号が $(-4) \times 3$ のように逆であれば、 (-4) の3つ分であるからと、 $(-4) \times 3 = (-4) + (-4) + (-4)$ と考えることができる。

$(-4) \times 3 = (-12)$ と同様に、 $(+4) \times (-3)$ の積を求めることができる「 \times 」の約束、があると考える。

- ④ 「 \times 」の約束は乗除計算の考えを拡張

$4 \times (-3)$ のかけ算をかけ算の対象とするよう、乗除計算の考えを拡張した、と考える。数が負の数に広がるの連なって乗除計算の考えも拡張することになり、抽象度が深まったと見ることもできる。

乗法の交換法則を踏まえると、 $(-4) \times (+3) = (+3) \times (-4)$ とならざるを得ない。

- ⑤ 除法計算の進め方は乗法計算の逆算の考え方で

除法計算の学びは、乗法計算の逆算としての考え方で進める。その根底はかけ算の式である。

1あたり量×いくつ分＝全体量

いくつ分＝全体量÷1あたり量

1あたり量＝全体量÷いくつ分

⑥ 子どもの誰もが分かりできる乗除計算の学びに

上記②～⑤のように、学習内容の抽象的な度合いが深まってくる。

子どもにとって正・負の数の四則計算は、初めて学ぶ学習内容であり、**中学校数学の基礎中の基礎となる学習内容**でもある。

したがって、子どもの誰もが正・負の数を対象とする四則計算が分かるできる学びに子ども自身が進めることのできる活動を組織することであり、**誰一人置き去りにしないことを絶対的な目標**にしての学びにすることである。

そんな学びは、子ども個々とみんなが数直線やタイル図などを活用し、考えを結果に繋げる論理が視覚や手を動かす活動を通し、協働し合い理解し合って、**一人一人の子どもが「分かった できた」**に辿り着けるまで取り組める学びである。

(2) 正・負の数の乗除法を学ぶ拠り所

正・負の数の加減法の学びにおいて拠り所となった下記の事柄は、乗除計算を学ぶ過程においてもその重要さは変わらず、折に触れて活用すべきである。

① 正負の意味

正負の持つ意味を次のように考える。

「正負の意味は、互いに反対方向を表すものである。」

② 0の意味

0は、これまでに次のような捉えをしてきた。そこにiv、vのような捉えが加わる。

i ある数に加えても、ある数から引いても、もとの数を変えないような数。

ii 全くないことを示す数。

iii アラビア数字を用いて数を表す場合、空位を示す数。

iv 正でも負でもない数。

v 反対方向に働く2量が等しく互いにつり合いが取れているとき、これらの量の総体を0というのである。

③ 正・負の数

反対方向に働く2量のつり合いが破れたとき、これらの量の総体は、正または負となり、正・負の数はこれを表すものである。

正・負の数は、いつでも0を基準にするとともに、0を自分の中に持っている。

④ 数直線

基準の点・原点O(0)，原点の右向きが正の方向1、2、3……、原点の左向きが負の方向-1、-2、-3……と数を等間隔に目盛った直線。

数直線には、小数、分数を含めて正・負の数と0の全ての数を目盛ることができる。

⑤ 絶対値

数直線で、「基準の点O(0)から、ある数までの距離を絶対値」という。

0の絶対値は0であり、0でない数の絶対値は正の数である。

⑥ 反数

0の中に含まれる反対方向の2量を互いに反数という。

すなわち反数は、数直線の原点・0を中心に180度回転したところにある数と、もとの数の2つの量をいい、絶対値が等しく符号が反対の数。

2. 正・負の数の乗法・除法

(1) 正・負の数の乗法計算

正・負の数の乗法は1あたり量×いくつ分＝全体量を根底に、正・負の数を扱いつ

つ子どもが帰納的な考え方で、正・負の数の計算規則を見出す学びに取り組む。

① 2人で正・負の数の乗法計算の規則をまとめる

正・負の数の乗法計算の規則を次のア、イを2人で考えまとめる。そのまとめをみんなで論理の是非を話し合い、正・負の数の乗法計算の規則をまとめる。

ア 次のように、+4に整数をかけ、かける数を1ずつ小さくしていくとき、i～ivの各問いを2人で考え、まとめること。

ア

$(+4) \times (+3) = +12$	□□……□□
$(+4) \times (+2) = +8$	□□……□□
$(+4) \times (+1) = +4$	□□□□
$(+4) \times 0 = 0$	□□□□
$(+4) \times (-1) = \square$	□□□□
$(+4) \times (-2) = \square$	□□……□□
$(+4) \times (-3) = \square$	□□……□□

- i $\times (+3) \sim \times 0$ までの積を表すタイルの数を示すこと。
- ii $\times (-1) \sim \times (-3)$ までの積を示す数を□に入れ、その積を表すタイルの数を示すこと。

そのタイルは正の数と異なることが目で判別できるタイルにすること。

- iii 反数になる数を1つ取り上げ、その理由を述べること。
- iv -1は0より1小さいことを具体的に示すこと。
- v かける数が1ずつ減っていくと、どんな決まりがあるといえるでしょうか。その決まりはこれまでに学んだどんなことと結びつくでしょうか。
- vi $(+4) \times (+3) = 12 \sim (+4) \times (-3) = \square$ から、正・負の数のかけ算にどんな決まりがあるといえるでしょうか。

イ $(-4) \times (+3)$ は $(-4) \times 3$ と同じであるから

$(-4) \times 3 = (-4) + (-4) + (-4) = -12$ となることを踏まえ、アのように、(-4)に整数をかけ、変える数を1ずつ小さくしていくとき、i～ivの各問いを2人で考え、まとめること。

イ

$(-4) \times (+3) = -12$	□□……□□
$(-4) \times (+2) = \square$	□□……□□
$(-4) \times (+1) = \square$	□□□□
$(-4) \times 0 = \square$	□□□□
$(-4) \times (-1) = \square$	□□□□
$(-4) \times (-2) = \square$	□□……□□
$(-4) \times (-3) = \square$	□□……□□

- i $\times (+2) \sim \times (-3)$ までの積を求めること。
- ii -12を含めて、求めた積をタイルで表すこと。
- iii かける数が1ずつ減っていくと、どんな決まりがあるといえるでしょうか。
- iv $(-4) \times (+3) = -12 \sim (-4) \times (-3) = \square$ から、正・負の数のかけ算にどんな決まりがあるといえるでしょうか。

② みんなで正・負の数の乗法計算の規則をまとめる

2人で協働してまとめてきた①のアとイの考え等を、次の観点に沿って発表し、みんなで協働して乗法の計算規則等をまとめる。

- ア ①のアとイの各かけ算の積とタイル数を発表し合い、積とタイルの数を確認する。
- イ ①のアとイの各かけ算のかける数(乗数)が1ずつ減ると、タイル図からアは積が4(被除数)つ分少なくなり、イは積が4(被除数)つ分増えることを、積の数字とタイルの数からみんなで確かめ合う。
- ウ イのことは、既習事項の何が根底(1あたり量×いくつ分=全体量)になっている

かをみんなで考え理解し合う。

エ 乗法計算の規則

①のアとイの各かけ算の積とタイル数から、乗法計算の規則を次のようにまとめることができる。

- i 同符号の2数の積は、符号は+で、絶対値は絶対値の積
- ii 異符号の2数の積は、符号は-で、絶対値は絶対値の積
- iii ある数と0との積は0

◇ 乗法の交換法則

$$(-4) \times (+3) = -12$$

$$(+3) \times (-4) = -12$$

$$(-4) \times (+3) = (+3) \times (-4) \text{ の乗法の交換法則が成立}$$

* i) 授業時間は、①のアとイが1.5時間、②が0.5時間、の計画。

ii) 授業ではアとイの積のタイルを描く場所は空白にして活用。

(2) 正・負の数の除法

正・負の数の除法は1あたり量 \times いくつつ分=全体量を根底に、かけ算の逆算として、 $\square = \text{全体量} \div 1 \text{あたり量 (いくつつ分)}$ に当てはめて \square を求める計算になる。

すなわち、2つの数をA、Bとすると、 $X \times A = B$ 、または $A \times X = B$ から $X = B \div A$ としてX(商)を求める計算になる。

① 2人で正・負の数の除法計算の規則をまとめる

正・負の数の除法の計算の規則を次のア、イ、ウを2人で考えまとめる。そのまとめをみんなで論理の是非を質し合い、正・負の数の除法計算の規則をまとめる。

ア $(-8) \div (+2) = \square$ の計算の仕方を考えよう。

$(-8) \div (+2) = \square$ の計算の仕方を、次のi、ii、iii、iv、vの各問いに2人で考え、まとめること。

i $(-8) \div (+2) = \square$ の割り算の \square を求めるために、どのような計算を基にして考えますか。その考えに \square を入れ、 \square を求める計算の式にすること。

ii \square に当てはまる数の符号を決める考えとその理由を述べること。

iii \square に当てはまる数の絶対値を決める考えとその理由を述べること。

iv i、ii、iiiから、 $(-8) \div (+2) = \square$

v ivの \square の数値を「等分除の考え方で、等分した個々の量を入れる枠を設けたタイル図」の考え方をういて説明できるでしょうか。

イ i) $(+12) \div (-4)$ ii) $(-12) \div (-4)$ の2題をアと同じように2人で考え、計算をし答え・商を求めること。

ウ ア、イの学びから、除法計算の規則を2人でまとめること。

② みんなで正・負の数の除法計算の規則をまとめる

2人で協働してまとめてきた①のアとイの考え、各割り算の商などを次の観点に沿って発表し、みんなで納得し合って除法の計算規則等をまとめる。

なお、上記vの学びは、みんなと0の割り算を学ぶとき学ぶことを知らせる。

ア ①のアとイの考え、各割り算の商とその商を求めるためのかけ算の式を発表し合い、論理を質し合う。

イ ①のアとイの各割り算の商は、かけ算を基にして求めていることを子どもの誰もが理解し合っているかを協働してきた2人で確かめ合う。その際、正・負の数の乗除計

算の根底である考え方の「1あたり量×いくつ分＝全体量」もノートに記述させ、併せて確認し合う。

ウ ア、イ、を踏まえて、子ども個々が除法計算の規則をノートに記述し、協働してきた子どもで確かめ合い、協働の2組が発表し下記のような内容をまとめとする。

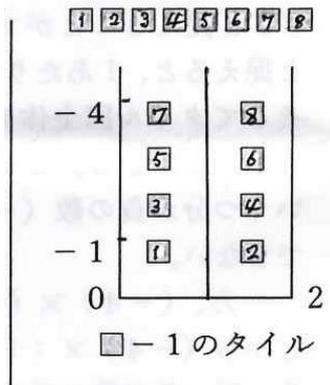
- i 同符号の2数の商は、符号は+で、絶対値は絶対値の商
- ii 異符号の2数の商は、符号は-で、絶対値は絶対値の商

③ $(-8) \div (+2)$ を等分除

ア みんなで $(-8) \div (+2)$ の、 -8 を -1 ずつの8個に分ける。その1個ずつを順次、 $+2$ の2でタイル図に設けた2つの枠の中にみんなで右図のように入れる。

図から、 $(-4) \times (+2) = -8$ であることを確かめ合う。

イ $(+8) \div (-2)$ が、アのようなタイル図を作ることができるか。みんなで考える。



④ 0 についての除法 ($0 \div A$ $A \div 0$ A は $A \neq 0$ である全ての数)

ある数 (0 でない) を \square とするとき、0 についての除法は次の i、ii、iii がある。その3通りの答えが何になるかは、 \square を入れたかけ算の式にして考える。

- i $0 \div A$ ($0 \div A = \square \rightarrow A \times \square = 0 \rightarrow \square = 0$ \square が正に数でも負の数でも $0 \div A = 0$)
 $0 \div A$ を、タイル図で「0 を A 等分してその1つを、A でつくる1つの枠に入れる」とすると、A 等分の1つが0であるから、A がどんな数でもよいことが分かる。
- ii $A \div 0$ ($A \div 0 = \square \rightarrow 0 \times \square = A$ この \square の数はない。0 で割ることはできない)
 $A \div 0$ は、タイル図で「A を 0 等分して枠に入れる」といっても 0 等分できないし、枠を作れないことが分かり、割るの演算記号を用いているが除することができないことを示している。
- iii $0 \div 0$ ($0 \div 0 = \square \rightarrow 0 \times \square = 0$ \square はどんな数でもよい。答えは無数にある)
 $0 \div 0$ も、0 を 0 等分してが……できない、というよりどんな数でもよいこととなり、答えを定めることができない。

* i) 上記 ii と iii から、0 で割ることができないことを示している。

- ii) 授業時間 2人での協働の学び1時間、学級での学び1時間、 $(-8) \div (+2)$ のタイル図の作成及び0の割り算の学び1時間

3. 正・負の数の乗法・除法で扱う教材について

(1) 正・負の数の乗除法で扱う正と負の数・量について

正と負の数・量を扱える素材、見つけられないし、できない。

それは、適切で具体的に示すことのできる正・負の数・量を見つけ出すこと。そして、その量を基に半具体物などを取り入れて子どもの誰もが「分かった できた」の学ぶ喜びを実感させる授業を組織することができないこと、子どもにすまない。

① 基本はかけ算の式を根底に

葛藤を抱えながらも、乗除法の学びであることから、次のようなことを基本に据え、学びを進める授業づくりの考え方をまとめてみた。

正・負の数の乗除法は1あたり量×いくつ分＝全体量を根底に、正・負の数を扱いつつ子どもが帰納的な考え方で、正・負の数の計算規則を見出す学びに、個々でそしてみんなで取り組む授業の一つの在り方を求めた資料である。

② 既習の学びを生かしての乗除法の学びに

これまでに学んできた事柄を生かすとともに、可能な限り新たに約束することをすくなくしての学びにできるよう考えた。

ア 乗法の学びでは

乗法の学びでは、 $1 - (1) - ③$ でも記述のように、 $(-4) \times (+3)$ を $(-4) \times 3$ と捉えることができる。つまり、 $(-4) \times 3 = (-4) + (-4) + (-4)$ と捉えると、1あたり量が (-4) でいくつつが 3 と考えて、タイル図を作る(想定)。そしてタイル図全体に負のタイルが 12 個あることから、 $(-4) \times (+3) = (-12)$ とできる。ところが $(+3) \times (-4)$ にすると、1あたり量が $(+3)$ で、いくつつが負の数 (-4) では、 $(+3)$ のいくつつとすればよいかを考えることもできない。

一方、 $(-4) \times (+3)$ と $(+3) \times (-4)$ は、どちらも積が -12 になることから $(-4) \times (+3) = (+3) \times (-4)$ と成り立つことに気付くことができる。正・負の数の乗法では、交換法則が成り立つことを理解する。

イ 除法の学びでは

除法の学びでは、 $(-4) \div (+3)$ では除法の等分除のように -4 を 3 等分して、タイル図に 3 つの枠を設けて 3 等分した数値を順次入れる、ということを想定できる。タイル図を作成し、 -4 を等分するしできる。3 つの枠に -1 を 1 個ずつ入れる。残りの -1 を 3 等分して、 $-1/3$ 等分した 3 個分を 1 個ずつ枠に入れる。各枠は $(-1) + (-1/3)$ が入っており、 $(-4) \div (+3) = -4/3$ と分かる。ところが乗法と同様に、 $(+3) \div (-4)$ にすると、3 を -4 等分に分割できるかになる。分割することができない。

(2) 正・負の数の乗除法で扱う学習内容について

正と負の数・量を扱える学習材、適切な学習材を考えるとできず、「2. 正・負の数の乗法・除法」のような学習材を学習内容としての授業づくりの資料とした。

ア 乗法の学びでは

乗法の学びでは、できるだけ約束を作らず、子ども誰もがここまでに学習してきた知識・技能を活用し、積の数をタイルで表して 2 人で協働してかける数が 1 ずつ減る、1 ずつ増えていくときの決まりを見出す活動を位置づけた。

イ 除法の学びでは

乗法の逆算として、1あたり量 \times □ = 全体量から、□ = 全体量 \div 1あたり量で □ を求めることを基本に据えての活動である。この活動もここまでに子どもの誰もがかけ算を学び、そしてそのかけ算の学びを基に割り算を学んできた既習の内容を拠り所としての学びと考えた活動を位置づけた。

(3) 乗除計算の学びの基盤はタイル図

正・負の数の乗除計算の根底が、「1あたり量 \times いくつつ分 = 全体量」とし、及び正・負の数の乗除計算の積と商が絶対値により決められることから、正負の符号を外した累加的(かけ算)、累減的(割り算)なタイル図が乗除計算の基盤といえる？。

